初中平面几何知识常见考点示例

张东明（河北省唐山市路北区韩城镇中学）

摘　要：关注初中平面几何知识在各类试题中的常见考点，有助于学生厘清常考试题类型，加强解题运用的灵活性、综合性，进而提高数形结合能力、运算求解能力及推理论证能力。

关键词：平面几何；定理；相似；全等；切线；四点共圆

文章编号：1002-2171(2024)9-0073-03

本文拟通过列举典例的形式，具体阐述关于初中平面几何知识在各类试卷中的常见考点，旨在帮助学生厘清平面几何中的常考知识点，提高其数形结合能力、运算求解能力及推理论证能力。

1　射影定理

例1　如图1所示，AB 是半圆的 O 直径，点 C 在半圆上，$CD\perp AB$，垂足为 D，且 $AD=5DB$，则 $\tan\angle OCD$ 的值为______。

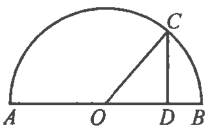

图1

解：设圆的半径为 R，则有 $OA=OB=OC=R$。

于是，结合 $AD=5DB$，可求得 $AD=\frac{5}{3}R$，$BD=\frac{1}{3}R$，$OD=\frac{2}{3}R$。

因为 AB 是半圆的直径，所以 $AC\perp BC$，又 $CD\perp AB$，所以 CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高。从而，根据射影定理可得 $CD^2=AD\cdot BD=\frac{5}{9}R^2$，故 $CD=\frac{\sqrt{5}}{3}R$。

故所求 $\tan\angle OCD=\frac{OD}{CD}=\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{\sqrt{5}}{3}R}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

说明：一般地，根据平面图形分析可得到直角三角形斜边上的高，并灵活运用直角三角形中的射影定理构建等量关系，从而简捷求解有关问题。

2　三角形相似

例2　如图2所示，直线 AB 经过圆 O 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$，圆 O 交直线 OB 于 E，D，联结 EC，CD，若 $\tan\angle CED=\frac{1}{2}$，圆 O 的半径为3，则 OA 的长为(　　)。

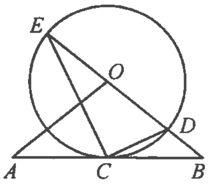

图2

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解：如图3所示，联结 OC。因为 $OA=OB$，$CA=CB$，所以 $OC\perp AB$。

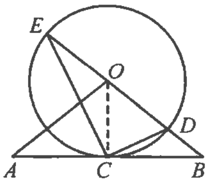

图3

又因为 OC 是圆 O 的半径，所以 AB 是圆 O 的切线。

因为 ED 是直径，所以 $\angle ECD=90°$，所以 $\angle E+\angle EDC=90°$。又 $\angle BCD+\angle OCD=90°$，$\angle OCD=\angle ODC$，所以 $\angle BCD=\angle E$。又因为 $\angle CBD=\angle EBC$，所以 $\triangle BCD\backsim\triangle BEC$，所以 $\frac{BC}{BE}=\frac{BD}{BC}$，故 $BC^2=BD\cdot BE$。

因为 $\tan\angle CED=\frac{CD}{EC}=\frac{1}{2}$，$\triangle BCD\backsim\triangle BEC$，所以 $\frac{BD}{BC}=\frac{CD}{EC}=\frac{1}{2}$。

设 $BD=x$，则 $BC=2x$，因为 $BC^2=BD\cdot BE$，所以 $(2x)^2=x(x+6)$，解得 $x=2$，所以 $BD=2$。所以 $OA=OB=BD+OD=2+3=5$。

3　圆的切线

例3　如图4所示，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，AP 是 $\odot O$ 的切线，A 是切点，BP 与 $\odot O$ 交于点 C。

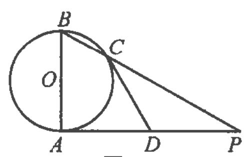

图4

(Ⅰ)若 $AB=2$，$\angle P=30°$，求 BC 的长；

(Ⅱ)若 D 为 AP 的中点，求证：直线 CD 是 $\odot O$ 的切线。

解：(Ⅰ)联结 CA，则因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle BCA=90°$。又由 AP 是 $\odot O$ 的切线，得 $\angle BAP=90°$，从而可知 $\angle BAC=\angle P=30°$。

于是，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，结合 $AB=2$，即得所求 $BC=1$。

(Ⅱ)因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle BCA=90°$，所以 $\angle ACP=90°$。

于是，在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 中，结合 D 为 AP 的中点，可

得 $CD=\frac{1}{2}AP=AD$，因此$\angle DAC=\angle DCA$。

如图5，联结 OC，则由$OC=OA$，得$\angle OAC=\angle OCA$。

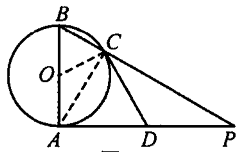
图5

从而，可知$\angle OCA+\angle DCA=\angle OAC+\angle DAC=\angle PAB=90°$，即 $OC\perp CD$。

又因为 OC 是$\odot O$ 的半径，故直线 CD 是$\odot O$ 的切线。

说明：本题第（Ⅰ）问需要运用已知圆的切线，并结合图形加以灵活求解；第（Ⅱ）问侧重考查证明圆的切线，显然具有一定的难度，解题关键是需要先得到$\angle ACP=90°$，再利用直角三角形的特性加以分析、证明。

4 切割线定理与三角形内角平分线性质

例4 如图6所示，已知 AB 是圆 O 的一条切线，切点为 B，ADE 是圆 O 的一条割线，圆心 O 在 DE 上，且 $BC\perp DE$，垂足为 C。

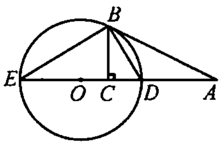
图6

（Ⅰ）求证：$\angle CBD=\angle DBA$；

（Ⅱ）若 $AD=3DC$，$BC=\sqrt{2}$，求圆 O 的半径。

解：（Ⅰ）易知 DE 是圆 O 的直径，所以$\angle EBD=90°$，所以$\angle BED+\angle EDB=90°$。因为 $BC\perp DE$，所以$\angle BCD=90°$，所以$\angle CBD+\angle EDB=90°$。

综上，可知$\angle CBD=\angle BED$。

又由 AB 是圆 O 的一条切线知$\angle DBA=\angle BED$，故可得$\angle CBD=\angle DBA$。

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$\angle CBD=\angle DBA$，所以 BD 平分$\angle CBA$，因此根据三角形内角平分线性质定理可得$\frac{BA}{BC}=\frac{AD}{DC}$。

于是，将 $AD=3DC$，$BC=\sqrt{2}$ 代入上式化简得 $BA=3\sqrt{2}$，所以根据 Rt$\triangle BCD$ 可得 $AC=\sqrt{BA^2-BC^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$。又 $AD=3DC$，故可得 $AD=3$。

又结合图形，根据圆的切割线定理得 $BA^2=AD\cdot AE$，因此 $AE=\frac{BA^2}{AD}=\frac{(3\sqrt{2})^2}{3}=6$，所以 $DE=AE-AD=6-3=3$。故所求圆 O 的半径为$\frac{3}{2}$。

说明：本题设计较好，求解第（Ⅱ）问时，需要以第（Ⅰ）问的结论作为解题切入点，自然就会联想到三角形内角平分线定理的应用。同时要注意勾股定理、切割线定理的灵活运用。

5 弦切角定理与三角形全等

例5 如图7所示，AB 为$\odot O$ 的直径，直线 CD 与半$\odot O$ 相切于点 E，且 $AD\perp CD$，垂足为 D，$BC\perp CD$，垂足为 C，$EF\perp AB$，垂足为 F，并联结 AE，BE。

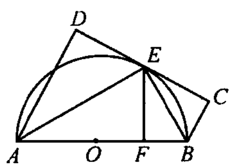
图7

（Ⅰ）求证：$\angle FEB=\angle CEB$；

（Ⅱ）求证：$EF^2=AD\cdot BC$。

解：（Ⅰ）因为 AB 是$\odot O$ 的直径，所以 $AE\perp BE$，所以$\angle FEB+\angle AEF=90°$。因为 $EF\perp AB$，所以$\angle EAF+\angle AEF=90°$，从而可得$\angle FEB=\angle EAF$。

因为直线 CD 与半$\odot O$ 相切于点 E，所以$\angle CEB$ 是圆的弦切角，根据弦切角定理可得$\angle CEB=\angle EAF$。

综上，可知$\angle FEB=\angle CEB$。

（Ⅱ）根据 $BC\perp CE$，$EF\perp AB$，$\angle FEB=\angle CEB$，BE 为 Rt$\triangle BCE$ 和 Rt$\triangle BFE$ 的公共边，可得 Rt$\triangle BCE\cong$Rt$\triangle BFE$，所以 $BC=BF$。 ①

同理，可知 Rt$\triangle ADE\cong$Rt$\triangle AFE$，所以 $AD=AF$。 ②

在$\triangle AEB$ 中，根据 $AE\perp EB$，$EF\perp AB$，可得 $EF^2=AF\cdot BF$。 ③

于是，将①②代入③即得待证 $EF^2=AD\cdot BC$。

说明：本题涉及线线垂直较多，需要结合图形加以灵活运用。难点在于第（Ⅱ）问，需要“两次”根据三角形全等证明 $BC=BF$，$AD=AF$。此外，活用“同理”方式，可简化过程。

6 圆周角定理与四点共圆

例6 如图8所示，在$\odot O$ 中，已知 P 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，且弦 PC，AB 交于点 E，弦 PD，AB 交于点 F。

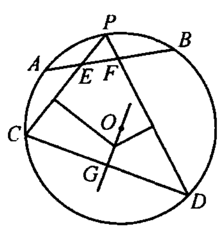
图8

（Ⅰ）若$\angle PFB=2\angle PCD$，计算$\angle PCD$ 的大小；

（Ⅱ）若线段 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G，求证：$OG\perp CD$。

解：（Ⅰ）联结 PB，BC，则结合图形可得$\angle BFD=\angle PBA+\angle BPD$，$\angle PCD=\angle PCB+\angle BCD$。

因为 P 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以根据同弧所对圆周角相等可知$\angle PBA=\angle PCB$。又因为$\angle BPD=\angle BCD$，所以可知$\angle PCD=\angle PBA+\angle BPD=$

$\angle BFD$。

又因为 $\angle PFB+\angle BFD=180°$，因此可得 $\angle PFB+\angle PCD=180°$。

于是，结合 $\angle PFB=2\angle PCD$，可得 $3\angle PCD=180°$，故所求 $\angle PCD=60°$。

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\angle PCD=\angle BFD$，又由图知 $\angle BFD+\angle EFD=180°$，所以可得 $\angle PCD+\angle EFD=180°$，据此即得 C,D,E,F 四点共圆，而且圆心 O 既在线段 CE 的中垂线上，又在线段 DF 的中垂线上。

从而，点 G 就是过 C,D,E,F 四点的圆的圆心，所以点 G 在线段 CD 的中垂线上。

又易知点 O 也在线段 CD 的中垂线上，故必有 $OG\perp CD$。

说明：本题具有一定的难度，第（Ⅰ）问关键是由圆周角定理得 $\angle PFB$ 与 $\angle PCD$ 互补；第（Ⅱ）问需要活用四点共圆的判定与性质，关键是证明点 G 在线段 CD 的中垂线上。

7　结语

分析、解决平面几何问题时，我们要注重数形结合思想的运用，观察图形特征，联系教材相关知识。总之，关注平面几何知识常见考点，不仅有利于提高学生对教材相关知识的理解与运用能力，而且有利于强化数形结合能力，进而不断提高解题的技能、技巧。

“课前三分钟”让初中数学课堂“活”起来

胡元彬（重庆市第八中学校）

摘　要：有效利用“课前三分钟”是数学教学的必要环节，也是调动学生自主性、参与性、积极性的关键所在。在开展数学教学时，有效利用“课前三分钟”，精心设计纠错、计算、朗读、观看视频及课前导入等环节，可提高学生知识学习的积极性，让他们快速进入学习状态，这样既能起到承上启下的作用，也对构建高效课堂具有积极意义。

关键词：课前三分钟；初中数学；课堂效率

文章编号：1002-2171(2024)9-0075-02

“课前三分钟”，一方面，旨在充分利用预备铃响到正式上课铃响的一点时间，为正式上课做好准备。既能让学生实现课间与课堂教学、个人情绪的切换，还能让他们有效集中课堂的注意力，提升教学质量。另一方面，也能通过朗读、计算、课前导入、纠错、观看视频等形式调动学生的学习积极性，激发兴趣。“课前三分钟”有效补充并延伸了传统数学课堂，在提升课堂有效性方面有显著成效。因此，若想将数学课堂的氛围调动起来，“课前三分钟”就显得弥足珍贵。对于如何利用“课前三分钟”，笔者做了如下思考与探索。

1　“三分钟”纠错，有的放矢，一举多得

及时纠错、总结错题原因是数学学习的重要途径。教师应充分把握“课前三分钟”的有效时间，让学生将日常所学、练习、测验及考试中易错、易混的题目集中起来，集体纠错，避免碰到原题或者同一类型的题目时再次失分，进而举一反三，快速作答。比如，教师让学生以小组的形式对测试卷中正确率较低的题目进行纠错。当然，也可以对前一天作业中出错较多的题目进行纠错。每组确定一个发言人，其他学生针对自己的错误提问或者发言人提问，学生一起讨论解决。每天一道经典例题，检验学生的学习效果，了解他们出错的原因，对症下药，集思广益，探讨一题多解的思路，掌握更多解题技巧和方法，既有助于学生之间的交流，也能培养他们形成互帮互助的良好意识。

2　“三分钟”计算，熟能生巧，提升能力

在数学“课前三分钟”的开展过程中，教师要结合初中生特点及教学内容的具体情况，有效利用“课前三分钟”。如“有理数”“整式的加减”“一元一次方程”都涉及有理数的运算。如果学生这一学期计算能力没有得到充分提升，或者法则没有掌握，那么后期学习就会很吃力。因此教师可以利用每天课前三分钟训练1—3道计算题，这样不仅能巩固学生的计算能力，也能提高他们的计算速度。同时应做好练后的批改与评价，对一个时间段正确率高的学生进行奖励。长期坚持，学生的计算质量会得到大幅度提高，他们学习数学的兴趣也会被激发出来，从而树立学习信心。当然，后期涉及的相关代数计算内容，都可以采取课前三分钟这种方式。

3　“三分钟”朗读，集中注意，调整状态

笔者所任教的班级中，少部分学生在第一节课或